

التحليل الرياضي 2
الامتحان الأول
المدة: ساعتان



المدرسة العليا للأساتذة
سكيكدة
قسم
PEST

التمرين الأول: (أسئلة حول الدروس 12 ن)

أ) أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة:

(1) التقارب المطلق $\Leftrightarrow$ التقارب النظمي

(2) التكامل $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ يسمى تكامل بيرتراند

(3) التكامل $\int_0^\infty \cos(2xt)e^{-t} dt$ متقارب نظيميا

(4) ليكن f و g تابعين $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ و $g \neq 0$:

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ و $\int_a^b g(t) dt$ متقارب فإن $\int_a^b f(t) dt$ متقارب

ب) (1) أدرس طبيعة التكاملات التالية:

$$I_1 = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{2+\ln(x)}{x+4} dx$$

(2) بإستعمال طريقة المسارات، أحسب نهاية التابع g عند $(0,0)$ المعروف بـ:

$$g(x, y) = \frac{x^4 + 2y^2}{x^2 - y^2}$$

التمرين الثاني: (4 ن)

(1) ليكن f تابع معرف من $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ حيث:

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

أ) بإستخدام التعريف (البرهان بإستعمال δ و ϵ) أثبت أن: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

ب) إذا علمت أن $f(0,0) = 0$ هل f مستمرة؟

ج) أحسب $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

(2) لتكن h دالة بمتغيرين. نقول أن h دالة توافقية على جزء من مجموعة التعريف إذا وفقط إذا كانت h

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
 تحقق معادلة لابلاس:

أثبت أن الدالة $h(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ هي دالة توافقية.

التمرين الثالث: (4ن)
1) أحسب التكامل الثنائي التالي :

$$I_1 = \int \int_D (y^2 - x^2)xy(x^2 + y^2) dx dy$$

حيث:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y, a \leq xy \leq b, 0 \leq y^2 - x^2 \leq 1\}.$$

باستعمال تبديل المتغير التالي : $u = xy, v = y^2 - x^2$
2) باستعمال الإحداثيات الكروية المعرفة بالتطبيق Ψ التالية:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi, r \geq 0.$$

أ) أوجد المصفوفة اليعقوبية $J(\Psi)$

ب) إذا علمت أن محدد المصفوفة اليعقوبية لـ Ψ هو $\det(J(\Psi)) = r^2 \sin \theta$

أحسب التكامل $I_2 = \int \int \int_D \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz$ حيث :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

ملاحظة:
لدينا:

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

ملحوظة هامة - لا تؤخذ في الحسبان إلا الأجوبة الكاملة والمكتوبة بكل وضوح وبدون أي شطب

الأستاذة: وفيدوشي

بالتوفيق.

التحسين الأول

[P] الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل.

① خطأ لأن: التقارب المطلق $\Rightarrow$ التقارب ببساطة

② خطأ لأن: التكامل $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ مسمى تكامل ديريكلي وهو متباين $\frac{\pi}{2}$

③ صحيح: التكامل $\int_0^{\infty} \cos(2nt)e^{-t} dt$ متقارب نظرياً لأن x

نضع $f(n,t) = \cos(2nt)e^{-t}$

$$|f(n,t)| = |\cos(2nt)e^{-t}| \leq e^{-t} = g(t) \quad (1)$$

④ التابع g قابل للمكاملة على $[0, \infty)$

⑤ التكامل $\int_0^{\infty} g(t) dt$ متقارب لأن

$$\int_0^{\infty} g(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

إذن $\int_0^{\infty} \cos(2nt)e^{-t} dt$ متقارب نظرياً

④ خطأ لأن

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow b} \frac{f(n)}{g(n)} = k$ فإن

$$\int_a^b f(t) dt \text{ و } \int_a^b g(t) dt \text{ يكونان من نفس الطبيعة}$$

①

$$I_2 = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} dt$$

0,5

لدينا

$$\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7} \sim \frac{2t}{5t^3} = \frac{2}{5t^2} \quad (0,5)$$

ومنه

$$\sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} \sim \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{t} \quad (0,5)$$

بإستعمال نظرية المقارنة لدينا:

$$\int_1^{\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} dt \text{ و } \int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt \quad (0,5)$$

لها نفس الطبيعة

لأن $\int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt$ متباعد لأنه تكامل ريمان

فإن

$$\int_1^{\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} dt \text{ متباعد} \quad (0,5)$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} dt \text{ متقارب لأنه تكامل على محدود} \quad (0,5)$$

مجال محدود

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} dt \text{ متباعد فإننا نستنتج أن}$$

0,5

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}} dt \text{ متباعد}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{2+\ln(t)}{t+4} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_2^x \frac{2+\ln(t)}{t+4} dt \quad (0,5)$$

أما $\frac{2+\ln(t)}{t+4}$ مستمرة على المجال $[0,1]$

(لكن ليست بالضرورة موجبة) إذن

$$\left| \frac{2+\ln(t)}{t+4} \right| \sim \frac{|\ln(t)|}{4} \quad (0,5)$$

جاء أن $\int_0^1 \ln t \, dt$ متقارب ، فإن التكامل $\int_0^1 \left| \frac{2+\ln(t)}{t+4} \right| dt$ متقارب (0,8)

أذن $\int_0^1 \frac{2+\ln(t)}{t+4} dt$ متقارب (0,8)

② باستعمال طريقة المسارات ، حساب نهاية التابع g المحرّف بـ

$$g(x, y) = \frac{x^4 + 2y^2}{x^2 - y^2}$$

خطا ، المسار $x=0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y)} \frac{2y^2}{-y^2} = -2 = l_1 \quad \text{0,78}$$

خطا ، المسار $y=0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x,0)} \frac{x^4}{x^2} = 0 = l_2 \quad \text{0,78}$$

جاء أن $l_1 \neq l_2$ ، فخطا

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) \quad \text{0,8}$$

غير موجودة .

المركب الثاني: ليكن f تابع معرف كما يلي

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{اثبات أن:} \quad (0,0)$$

$$\left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3| + |y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2|x| + y^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)|x| + (x^2 + y^2)|y|}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| = \|(x, y) - (0, 0)\|_1$$

اذن!

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon, \|(x, y) - (0, 0)\|_1 < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x, y) - 0| < \epsilon$$

اذن!

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

2) f مسطرة في

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \quad (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ حساب} \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{h^3 - 0^3}{h^2 + 0^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{h^3}{h^3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ موجودة وهي مساوية لـ } 1$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{0^3 - h^3}{0^2 + h^2} - 0}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{-\frac{h^3}{h^2}}{h} = -1 \quad (0,0)$$

4) اثبات أن $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ هي دالة توافقية

اثبات: للتحقق

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2x}{x^2 + y^2} \right] = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (0,0)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{2y}{x^2 + y^2} \right] = \frac{-2y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (0,0)$$

اذن!

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-2x^2 + 2y^2 - 2y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (0,0)$$

وهذا هو الدالة توافقية

$$J(\phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

08 $\det(J(\phi)) = r^2 \sin \theta$ ب / 1/2

$$I_2 = \iiint_D \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz =$$

$$\iiint_D \frac{r \cos \phi \sin \theta}{r^2 + 1} \cdot r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$$

0,25

$$D' = \{(r, \theta, \phi) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

0,5

$$I_2 = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3 \cos \phi \sin^2 \theta}{r^2 + 1} d\phi d\theta dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{r^2 + 1} \sin^2 \theta [\sin \phi]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta dr$$

0,25

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{r^2 + 1} \sin^2 \theta [\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0] d\theta dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{r^2 + 1} \sin^2 \theta d\theta dr$$

نلاحظ $\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{r^2 + 1} (1 - \cos 2\theta) d\theta dr$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{r^3}{r^2 + 1} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

0,25

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{r^3}{r^2 + 1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^2 \frac{r^3}{r^2 + 1} dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^2 \left[r + \frac{-r}{r^2 + 1} \right] dr$$

0,25

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |r^2 + 1| \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \ln 5$$

0,25

المركبة الثالثة
① حساب التكامل I_1

$$I_1 = \iint_D (y^2 - x^2)^{xy} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq y, a \leq xy \leq b, y^2 - x^2 \leq 1\}$$

بوضوح

$$v = y^2 - x^2 \quad \text{و} \quad u = xy$$

$$D' = \{(u, v) \mid a \leq u \leq b \wedge 0 \leq v \leq 1\}$$

0,25

حساب المصفوفة اليعقوبية J_ϕ

$$\phi: (x, y) \rightarrow (u, v)$$

$$J(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}$$

0,25

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$$

$$\det(J(\phi)) = \begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 + 2x^2 = 2(x^2 + y^2)$$

0,25

نلاحظ $du dv = 2(x^2 + y^2) dx dy$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} du dv = (x^2 + y^2) dx dy$$

0,25

$$I_1 = \iint_D (y^2 - x^2)^{xy} (x^2 + y^2) dx dy =$$

$$\int_a^b \int_0^1 v^u \cdot \frac{1}{2} dv du = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^1 v^u dv du$$

0,25

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{v^{u+1}}{u+1} \right]_0^1 du$$

0,25

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{u+1} du$$

$$= \frac{1}{2} [\ln |1+u|]_a^b$$

0,25

$$= \frac{1}{2} \ln |1+b| - \frac{1}{2} \ln |1+a|$$

② حساب التكامل I_2

/ P المصفوفة اليعقوبية J_ϕ

(القانون + الكتابة الصحيحة)